Simulation : application au système bonus-malus en responsabilité civile automobile

Programme

- Nombres pseudo-aléatoires
- Méthode de l'inverse
- Méthode d'acceptation-rejet
- Méthode polaire pour une générer un variable aléatoire distribuée selon une loi Normale
- Buts et mécanismes des systèmes bonus-malus
- Estimation des distributions en régimes transitoire et stationnaire

Nombres pseudo-aléatoires
Algorithmes - Exemple

- «Congruentiel multiplicatif» $x_n = a x_{n-1} \quad \text{modulo } m$
- «Congruentiel mixte» $x_n = \left(a x_{n-1} + c\right) \text{modulo } m$
- Exemple de calculs de la récurrence

$$a = 16'807 \;,\; m = 2^{31} - 1 = 2'147'483'647$$

$$x_0 = 1'234'567 \qquad x_0 / m = 0.000575$$

$$x_1 = 16'807 \cdot x_0 \text{ mod } m = 1'422'014'746 \qquad x_1 / m = 0.662177$$

$$x_2 = 16'807 \cdot x_1 \text{ mod } m = 456'328'559 \qquad x_2 / m = 0.212495$$

Nombres aléatoires - Exemple

$$a = 16'807 \ , \ m = 2^{31} - 1 = 2'147'483'647 \ , \ x_0 = 1'234'567$$

	multiplicatif		mixte	
tirages	moyenne	var.	moyenne	var.
10	0.49416	0.08831	0.45837	0.06636
100	0.50244	0.08355	0.46955	0.07491
1000	0.50247	0.08396	0.49782	0.08134
10000	0.49895	0.08443	0.49965	0.08297
100000	0.50310	0.08348	0.50227	0.08368
1000000	0.50450	0.08361	0.50340	0.08380
10000000	0.50465	0.08363	0.50355	0.08381
100000000	0.50466	0.08363	0.50356	0.08381

$$E[U] = 1/2 = 0.5 \ , \ Var[U] = 1/12 = 0.08\overline{3}$$

Intégration - Monte-Carlo

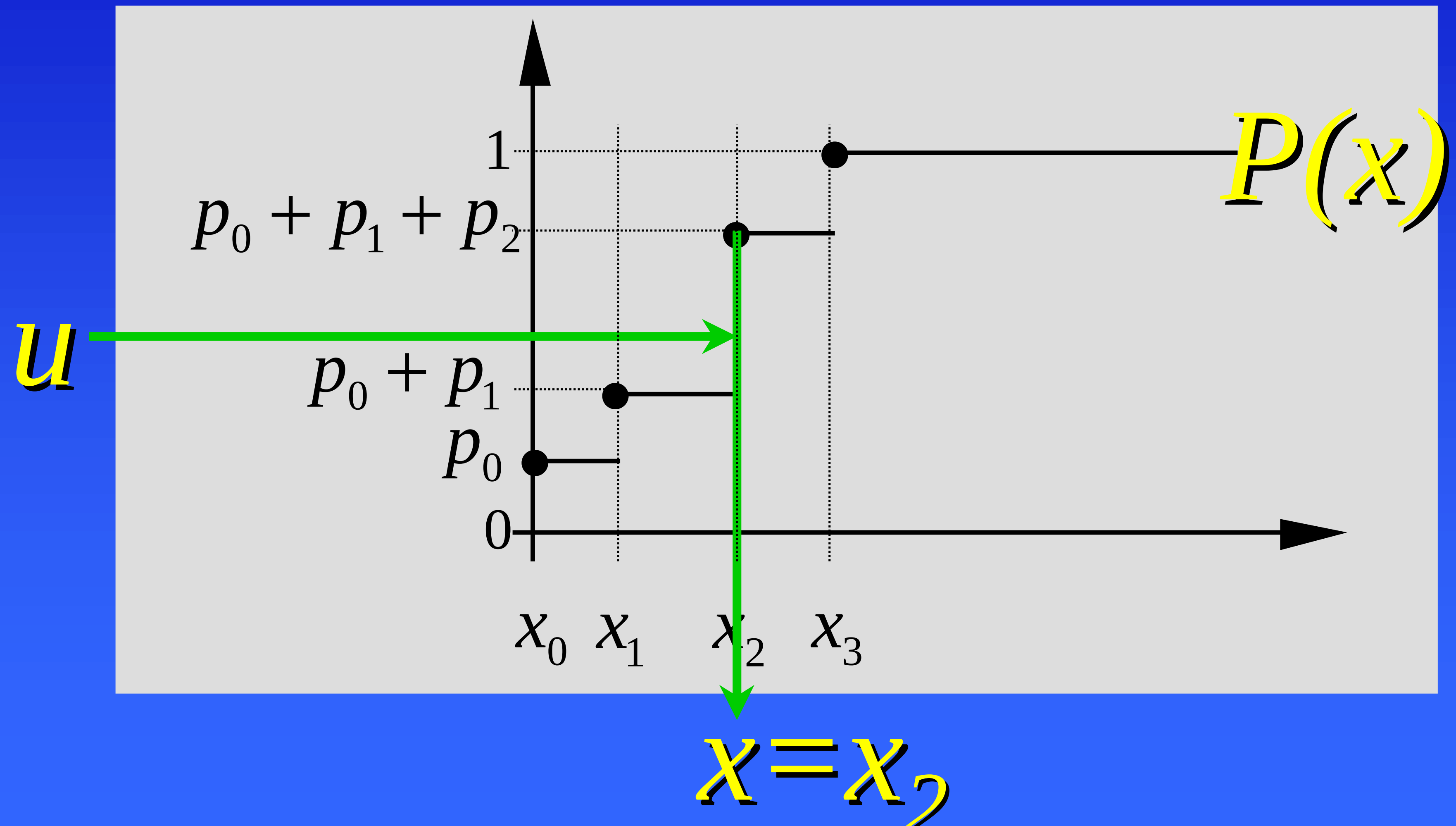
$$\theta = \int_0^1 g(x)\,dx \ , \ \theta = E[g(U)] \ , \ \sum_{i=1}^{k} \frac{g(U_i)}{k} \to E[g(U)] \text{ quand } k \to \infty$$

- Exemple d'intégration pour 100'000 nombres

$$\int_0^1 \sin(x)\,dx = 1 - \cos(1) \cong 0.459698$$

itér.	approximation	erreur	erreur en %
1	0.458571	−0.001127	0.7036
2	0.461269	0.001572	0.1194
3	0.459625	−0.000073	0.4755
4	0.460091	0.000393	0.3746

Méthode de l'inverse discrète



Inverse discrète
Rappel sur la famille a-b

$$P\{N=n\}=\left(a+\frac{b}{n}\right)\cdot P\{N=n-1\} \qquad n=1,2,3,\ldots$$

Distribution	$P\{N=0\}$	a	b
Poisson(λ)	$e^{-\lambda}$	0	λ
Binomiale(n,p)	q^n	$-\dfrac{p}{q}$	$\dfrac{p}{q}(n+1)$
Binomiale Négative(r,p)	p^r	q	$q(r-1)$
Géométrique(p)	p	q	0

Distribution	fdp
Poisson(λ)	$f(x)=\dfrac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^x}{x!}$
Binomiale(n,p)	$f(x)=\dbinom{n}{x}p^x q^{n-x}$
Binomiale Négative(r,p)	$f(x)=\dbinom{x+r-1}{x}p^r q^x$
Géométrique(p)	$f(x)=p\cdot q^x$

Inverse discrète - Famille a-b
Exemple de la loi Poisson

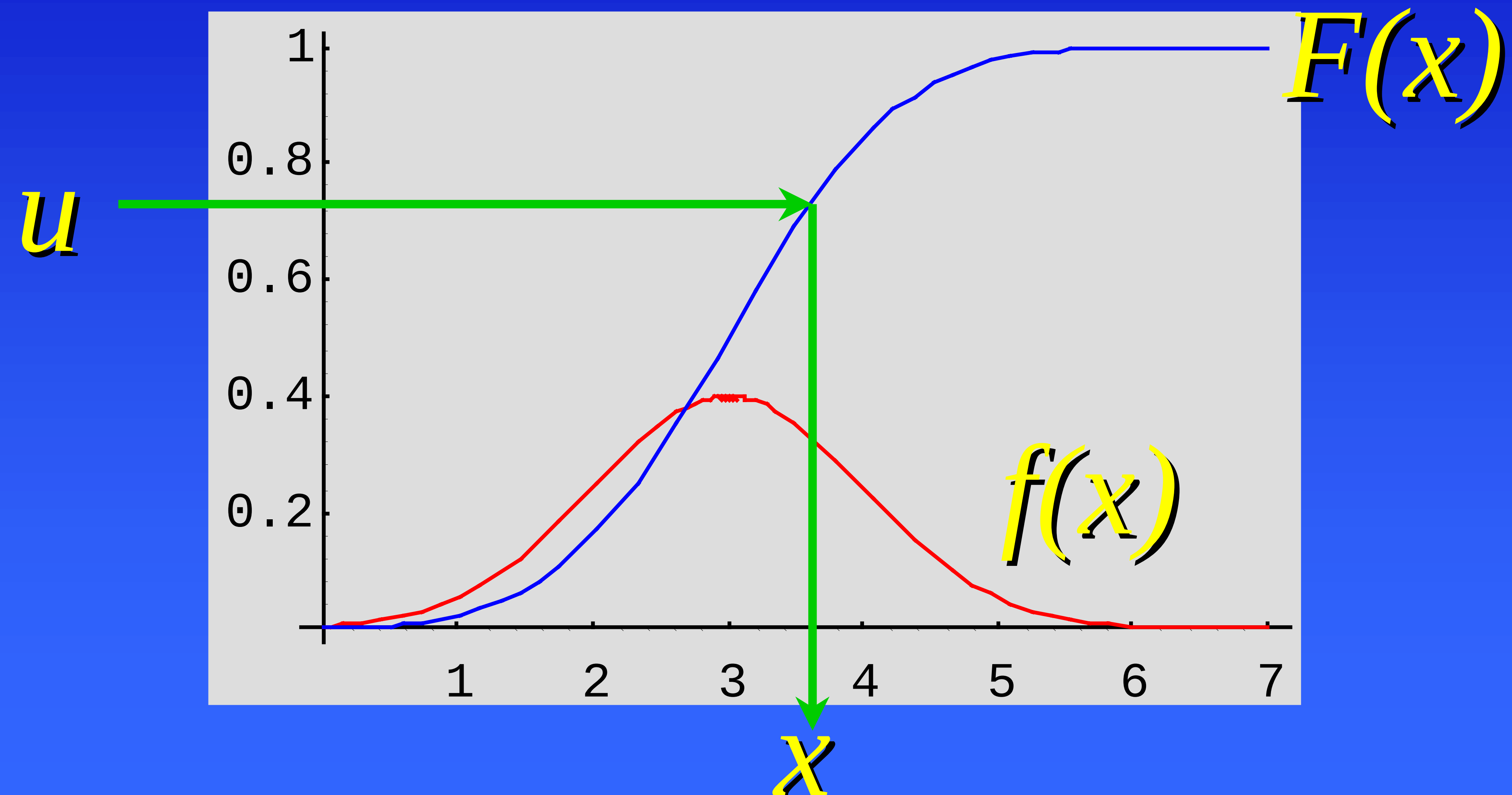
$$P\{N=n\}=\frac{\lambda}{n}\cdot P\{N=n-1\}\,,\quad n=1,2,3,\ldots,\quad P\{N=0\}=e^{-\lambda}$$

- Pseudo-code

1. Générer un nombre aléatoire uniforme U.
2. Poser n = 1, $p = e^{-\lambda}$, F = p.
3. Si $U < F$ alors poser $X = n-1$ et arrêter.
4. Poser $p = \frac{\lambda}{n} \cdot p$, $F = F + p$ et incrémenter n.
5. Continuer au point 3.

- Cet algorithme sera utilisé dans le cadre de notre simulation pour le nombre des sinistres

Méthode de l'inverse continue



Inverse continue Exponentielle et Gamma

$$F(x) = 1 - e^{-\beta x}, \quad x > 0 \quad \text{d'où} \quad x = -\frac{\log(1-u)}{\beta}$$

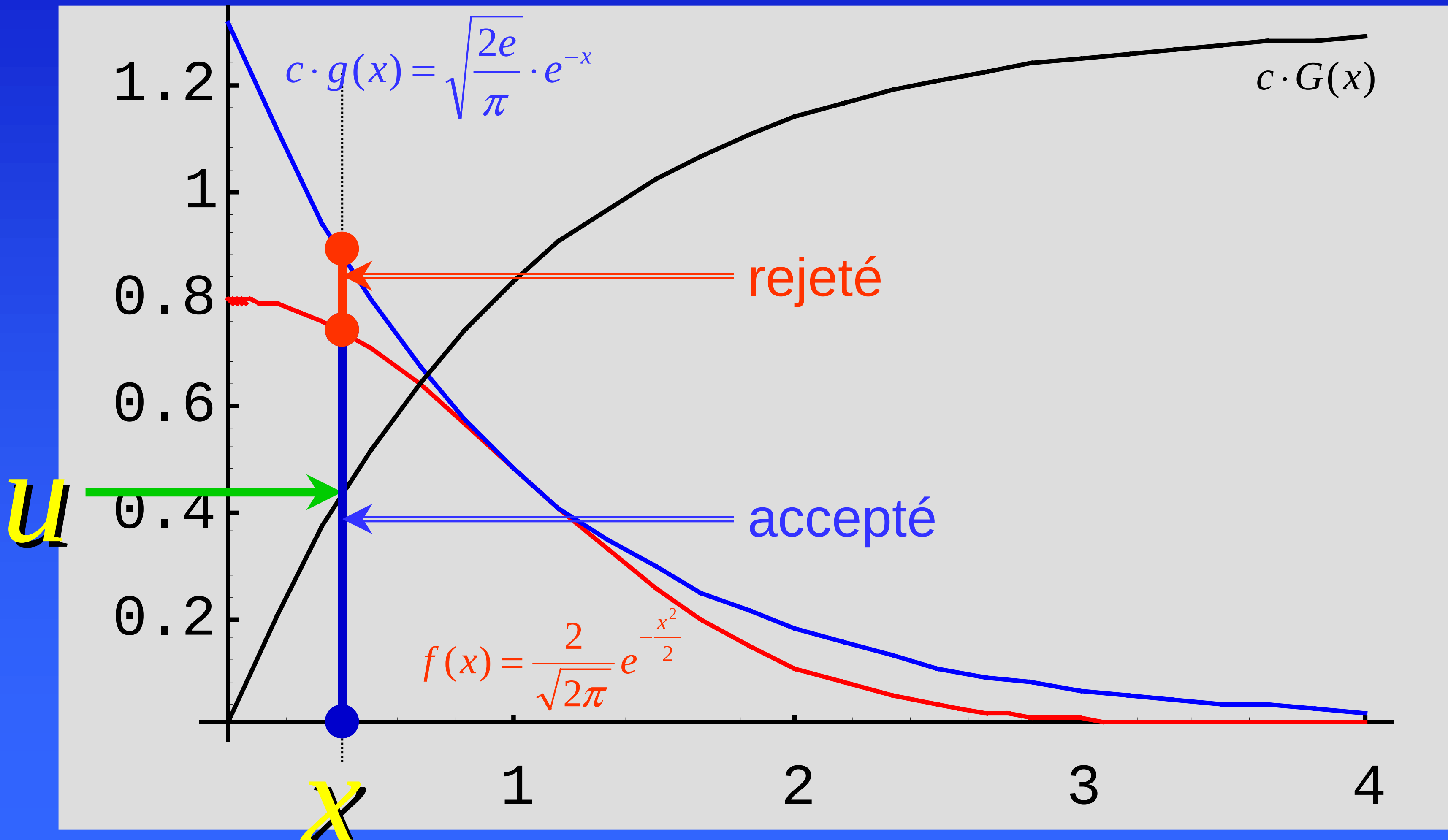
$$X = F^{-1}(U) = -\frac{\log(1-U)}{\beta} \quad \text{or } 1-U \sim \mathit{Uniforme}\,(0,1) \text{ donc } U \sim \mathit{Uniforme}\,(0,1)$$

$$\Rightarrow X = -\frac{\log(U)}{\beta}$$

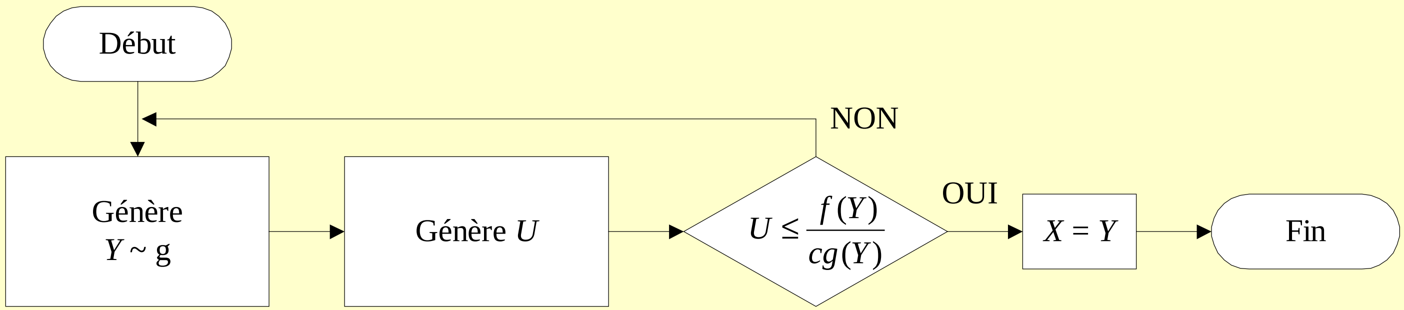
$$F(x) = \int_0^x \frac{\beta \cdot e^{-\beta y} \cdot (\beta y)^{n-1}}{(n-1)!} dy \quad \text{avec } \alpha \text{ entier}$$

$$X = -\frac{\log(U_1)}{\beta} - \frac{\log(U_2)}{\beta} - \ldots - \frac{\log(U_n)}{\beta} = -\frac{1}{\beta}\log(U_1 \cdot U_2 \cdots U_n)$$

Méthode d'acceptation-rejet Principe (Exemple: loi Normale)



Méthode d'acceptation-rejet
Organigramme et pseudo-code



1. Générer Y, une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1.
2. Générer un nombre aléatoire U_1.
3. Si $U_1 \le \exp\left\{\dfrac{-(Y-1)^2}{2}\right\}$ alors poser $X = Y$ et arrêter sinon aller à l'étape 1.
4. Générer un nombre aléatoire U_2 et poser

$$Z = \begin{cases} X & \text{si } U_2 \le \dfrac{1}{2}, \\ -X & \text{si } U_2 > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Méthode polaire - Loi Normale

$$R^2 = X^2 + Y^2 \;\;,\;\; \tan\theta = \frac{Y}{X}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \;, -\infty < x, y < \infty$$

$$d = x^2 + y^2 \;\;,\;\; \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) \;,\;\; J(d,\theta) = 2$$

$$f(d,\theta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{d}{2}} \;,\;\; 0 < d < \infty \;,\;\; 0 < \theta < 2\pi$$

Box-Muller
Pseudo-code et exemple

1. Générer deux nombres aléatoires uniformes U_1 et U_2.
2. Poser $R^2 = -2\log U_1$ et $\theta = 2\pi U_2$.
3. Poser $X = R\cos\theta = \sqrt{-2\log U_1}\cos(2\pi U_2)$.
4. Poser $Y = R\sin\theta = \sqrt{-2\log U_1}\sin(2\pi U_2)$.

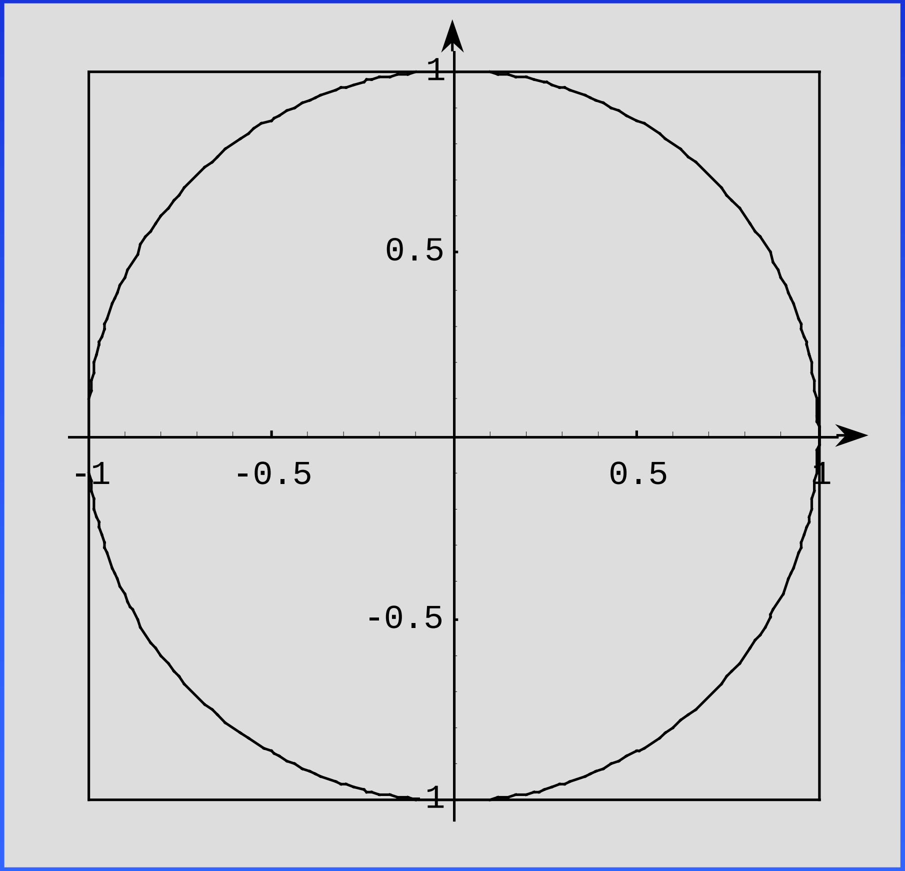
- Points 3 et 4 = Transformation de Box-Muller
- Moyenne de 20'000 nombres aléatoires

```
(+/BoxMuller 10000) ÷ 20000
0.004730451507
```

Méthode polaire - Loi Normale

$$V_2 = 2U_2 - 1$$

$$V_1^2 + V_2^2 \le 1$$



$$V_1 = 2U_1 - 1$$

Méthode polaire

$$\sin\theta = \frac{V_2}{R} = \frac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{V_1}{R} = \frac{V_1}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}$$

$$X = \sqrt{-2\log U}\,\frac{V_1}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}$$

$$Y = \sqrt{-2\log U}\,\frac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}$$

$$S = R^2 = V_1^2 + V_2^2$$

$$X = \sqrt{-2\log S}\,\frac{V_1}{\sqrt{S}} = V_1\sqrt{\frac{-2\log S}{S}}$$

$$Y = \sqrt{-2\log S}\,\frac{V_2}{\sqrt{S}} = V_2\sqrt{\frac{-2\log S}{S}}$$

Méthode polaire - Pseudo-code

1. Générer deux nombres aléatoires uniformes U_1 et U_2.
2. Poser $V_1 = 2U_1 - 1$, $V_2 = 2U_2 - 1$ et $S = V_1^2 + V_2^2$.
3. Si $S > 1$ alors retour à l'étape 1.
4. Poser $X = V_1 \sqrt{\dfrac{-2\log S}{S}}$.
5. Poser $Y = V_2 \sqrt{\dfrac{-2\log S}{S}}$.

Buts et mécanismes - Mécanisme appliqué de 1990 à 1996

Etat	Prime	Etat	Prime	Etat	Prime	Etat	Prime
0	45%	6	75%	12	130%	18	215%
1	50%	7	80%	13	140%	19	230%
2	55%	8	90%	14	155%	20	250%
3	60%	9	100%	15	170%	21	270%
4	65%	10	110%	16	185%		
5	70%	11	120%	17	200%		

$x = \max(x - 1; 0)$ ➤ pas de sinistre

$x = \min(x + n \cdot s; 21)$ ➤ si n sinistres sont survenus

➤ $s = 4$ dans ce système

Estimation des distributions

$$X_{t+1} = \begin{cases} 0, & \text{si } X_t + Y_{t+1} = -1 \\ X_t + Y_{t+1}, & \text{si } 0 \leq X_t + Y_{t+1} \leq n \\ n & \text{si } X_t + Y_{t+1} > n \end{cases}$$

$$Y_{t+1} = \begin{cases} s \cdot N_{t+1} & \text{si } N_{t+1} \geq 1 \\ -1 & \text{si } N_{t+1} = 0 \end{cases}$$

$$N_{t+1} \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

Estimation des distributions
Pseudo-code de la simulation

1. Initialisation de la matrice de résultat z à 0.
2. Pour k = 1 à 100000 par pas de 1 répéter
    3. Poser $x = 9$
    4. Poser $z[x;0] = z[x;0] + 1$
    5. Pour t = 1 à 1000 par pas de 1 répéter
        6. Poser n = InversePoisson(0.10)
        7. Poser y = -1 si n = 0 et $y = 4 \cdot n$ sinon
        8. Poser $x = \min(\max(x + y;0);21)$
        9. Poser $z[x;t] = z[x;t] + 1$
    10. Fin pour
11. Fin pour

Estimation des distributions en régime transitoire et stationnaire

- Distribution stationnaire $F(x) = \lim_{t \to \infty} F(x,t)$

Etat	temps 9	10	20	30	50	100	1000
0	0.4073	0.3674	0.5088	0.5428	0.5575	0.5594	0.5606
1	0.4073	0.3674	0.5439	0.5926	0.6133	0.6180	0.6180
2	0.4073	0.3674	0.5815	0.6466	0.6752	0.6825	0.6832
3	0.4073	0.3674	0.6361	0.7160	0.7479	0.7544	0.7539
4	0.4073	0.7353	0.8033	0.8221	0.8304	0.8344	0.8325
5	0.7727	0.7353	0.8208	0.8473	0.8614	0.8657	0.8643
6	0.7727	0.7353	0.8358	0.8695	0.8897	0.8947	0.8939

Prime et classe moyenne

- Classe moyenne

$$E\left[X_t\right] = \sum_{x=0}^{21} x \cdot f(x,t)$$

- Prime moyenne

$$E\left[b_{X_t}\right] = \sum_{x=0}^{21} b(x) \cdot f(x,t)$$

Temps	0	1	2	3	4	5	6	7
Classe	9.00	8.50	7.98	7.47	6.97	6.47	5.96	5.46
Prime	1.00	0.95	0.90	0.89	0.87	0.84	0.81	0.78

Temps	8	9	10	20	50	100	1000
Classe	4.95	4.44	4.31	2.87	2.15	2.10	2.10
Prime	0.76	0.73	0.72	0.63	0.58	0.57	0.57